UNIDAD N°2

Elementos de Álgebra. Teoría de Conjuntos, Álgebra de Boole. Matrices

Asignatura: Matemática PI

Carrera: Tecnicatura Universitaria en Emprendimientos Informáticos

Año: 2019

Universidad Provincial del Sudoeste
Promoviendo el Desarrollo Armónico de la Región

DOCUMENTO TEÓRICO

Unidad N°2. Elementos de Álgebra. Teoría de Conjuntos, Álgebra de Boole. Matrices

Asignatura: Matemática PI

Carrera: Tecnicatura Universitaria en Emprendimientos Informáticos

Facultad: Micro, Pequeña y Mediana Empresa

INDICE DE CONTENIDOS

Unidad N°2. Elementos de Álgebra. Teoría de Conjuntos, Álgebra de Boole. Matrices

Esta unidad se presentan contenidos correspondientes al área del Álgebra. Por un lado, comenzamos con temas referidos al Álgebra de conjuntos, donde definimos operaciones y propiedades que pueden aplicarse sobre uno o varios grupos de elementos. Veremos las notaciones habituales para trabajar en forma analítica y, a su vez, otras alternativas para interpretar propiedades y resultados en forma gráfica. Nos centraremos en un tipo de conjunto muy especial que contiene sólo dos elementos, donde observaremos la relación con el sistema binario descripto en la unidad anterior, y cuya formulación matemática resulta de gran importancia en aplicaciones para Informática.

Por otro lado, se incluyen además temas referidos al Álgebra Lineal, particularmente enfocados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Al comienzo, veremos el caso más sencillo de un sistema de ecuaciones lineales: dos ecuaciones con dos incógnitas. Este caso nos permitirá distinguir las diferentes situaciones que se pueden presentar al momento de resolver un sistema, cada una de las cuales tiene una denominación en particular. Al mismo tiempo, podremos realizar una interpretación geométrica de cada sistema, por medio de las gráficas de rectas en el plano cartesiano.
Una vez comprendida la temática, nos extenderemos a sistemas de ecuaciones más complejos, para los cuales se presentará la técnica de eliminación de Gauss.
Finalmente, mediante el uso de matrices, abordaremos otro punto de vista para definir y realizar operaciones simultáneas sobre múltiples elementos de una forma organizada. Así, vincularemos herramientas que permiten una resolución metódica y ordenada de sistemas de ecuaciones lineales.

1. DEFINICIONES

Un ***conjunto*** es una agrupación o colección de objetos, que se denominan ***elementos del conjunto***.

En este curso, se utiliza una letra mayúscula para identificar al conjunto. Para indica cómo está compuesto un conjunto, podemos emplear llaves { } escribiendo cada uno de los elementos separados por comas, o describir cierta fórmula o regla que deben cumplir los elementos.

Ejem

Ejemplo 1: Si llamamos C al conjunto de valores correspondientes a la cantidad de puntos que aparecen en las caras de un dado, podemos indicar las siguientes notaciones equivalentes: C= números naturales entre 1 y 6 inclusive ó $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ ó $C = \{x : x \in \mathbb{N},\, 1 \le x \le 6\}$. En este último caso, se lee: "*C es el conjunto de los valores x tales que x es un número natural, y x está entre 1 y 6 inclusive*".

Existen dos conjuntos que reciben nombres particulares, como se indica a continuación.

El ***conjunto vacío*** es el conjunto sin ningún elemento. Se lo representa con el símbolo $\varnothing$, o podemos indicar "$C = \{\}$".

El ***conjunto universal*** es el conjunto que contiene todos los elementos posibles en un determinado contexto, o equivalentemente, el que abarca a todos los conjuntos que estemos relacionando.

Dados dos conjuntos A y B, y un elemento x, podemos definir las siguientes relaciones:

Pertenencia: dado un elemento x, éste puede o no pertenecer al conjunto A. Según corresponda, indicamos "$x \in A$" y se lee "el elemento x pertenece al conjunto A", o de lo contrario "$x \notin A$" y se lee "el elemento x no pertenece al conjunto A".

Igualdad: decimos que dos conjuntos A y B son iguales únicamente si tienen los mismos elementos. Indicamos "$A = B$" ó "$A \neq B$".

Inclusión: decimos que A es un subconjunto de B si todos los elementos de A también pertenecen a B. Se dice que "A está incluido en B" y se indica "$A \subseteq B$". En caso contrario, se dice que "A está no incluido en B" y se indica "$A \not\subset B$".

Propiedades de la inclusión: dados los conjuntos $A, B, C \ y \ \varnothing$ se cumplen las siguientes propiedades:

1) $A \subseteq A$ 2) $\varnothing \subseteq A$ 3) $Si \ A \subseteq B \ y \ B \subseteq C, \ entonces \ A \subseteq C$

Ejemplo 2: Dados los conjuntos $A = \{1,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

$i) \ 2 \in A$ $ii) \ 2 \in B$ $iii) A \subseteq B$ $iv) \ \varnothing \not\subset A$

Solución:

i) Es falso, ya que el elemento 2 no pertenece al conjunto A (no está en la lista de valores indicados).

ii) Es verdadero, ya que el elemento 2 está en la lista de valores del conjunto B.

iii) Es verdadero, porque los tres elementos que forman el conjunto A también están dentro del conjunto B.

iv) Es falsa. Aunque no veamos el símbolo $\varnothing$ en la lista de elementos de A, por la propiedad presentada anteriormente, el conjunto vacío siempre está incluido en cualquier otro conjunto.

2. OPERACIONES Y PROPIEDADES

2.1. Operaciones

Dados dos conjuntos A y B, se definen las siguientes operaciones:

Unión: se indica "$A \cup B$" y es el conjunto que contiene *todos* los elementos de A y *todos* los de B.

Intersección: se indica "$A \cap B$" y es el conjunto que contiene únicamente los elementos *en común* de A y de B.

Complemento: se indica "A'" y es el conjunto que contiene a todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen al conjunto A.

Ejemplo 3: Dados los conjuntos $A = \{2,3,10\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ y el conjunto universal $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, indicar los conjuntos que se obtienen mediante las siguientes operaciones:

$i) \ A \cup B$ $ii) \ A \cap B$ $iii) A'$ $iv) \ B'$

Solución:

$i)\ A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,10\}$ $ii)\ A \cap B = \{3\}$ $iii) A' = \{1,4,5,6,7,8,9\}$

$iv)\ B' = \{1,2,8,9,10\}$

Hasta aquí hemos utilizado ejemplos de conjuntos de números naturales, simplemente con la intención de ilustrar los conceptos. No obstante, un conjunto puede contener otros tipos de elementos que no sean números, como ser letras, palabras, símbolos o incluso combinaciones de estos tipos.

Ejemplo 4: Dados los conjuntos $A = \{a, e, u, 2, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, e, g, h\}$, indicar los conjuntos que se obtienen mediante las siguientes operaciones:

$i)\ A \cup B$ $ii)\ A \cap B$

Solución:

$i)\ A \cup B = \{a, e, u, 2, 6, 1, 4, g, h\}$ $ii)\ A \cap B = \{e, 2\}$

2.2. Propiedades

Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera, U el conjunto universal, $\varnothing$ el conjunto vacío. Entonces valen las siguientes propiedades:

a) ***Identidad:*** $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$

b) ***Idempotencia:*** $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

c) ***Propiedad conmutativa:*** $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

d) ***Propiedad asociativa:*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

e) ***Propiedad distributiva:***

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

f) ***Absorción:*** $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

g) **Complementaridad:** $A \cup A' = U$ $A \cap A' = \varnothing$

h) ***Involución***: $(A')' = A$

i) ***Leyes de Morgan:*** $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ejemplo 5: Dados los conjuntos $A = \{1,2,5,6\}$, $B = \{1,3,5,7\}, C = \{2,5,8\}$, comprobar que cumple la propiedad distributiva para $(A \cup B) \cap C$ y de absorción para $A \cup (A \cap B)$.

Solución:

Para el primer caso, calculamos primero $A \cup B$, y al resultado lo intersectamos con el conjunto C. Entonces:

$$A \cup B = \{1,2,5,6\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,2,3,5,6,7\}$$
$$(A \cup B) \cap C = \{1,2,3,5,6,7\} \cap \{2,5,8\} = \{2,5\}$$

Por otro lado, calculamos las intersecciones primero para luego completar la operación con la unión:

$A \cap C = \{1,2,5,6\} \cap \{2,5,8\} = \{2,5\}$

$B \cap C = \{1,3,5,7\} \cap \{2,5,8\} = \{5\}$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2,5\} \cup \{5\} = \{2,5\}$

3. ÁLGEBRA DE BOOLE

3.1. Definición y propiedades

A todo conjunto en el que se hayan definido dos operaciones que tengan las propiedades mencionadas en la sección 2.2, se lo denomina Álgebra de Boole. Recibe este nombre por haber sido presentada inicialmente por el matemático George Boole, con el objetivo de aplicar técnicas algebraicas en expresiones de lógica proposicional. Sin embargo, una de las aplicaciones más importantes se enfoca al análisis y diseño de circuitos digitales, por lo que veremos algunos ejemplos de su uso.

Al tratarse de proposiciones lógicas, sólo se admiten conjuntos de dos elementos, que pueden identificarse como Verdadero ó Falso, Si ó No, 0 ó 1 (este caso es el más apropiado para circuitos digitales). A su vez, se definen las operaciones de suma binaria (denominada OR, notación $A+B$), producto binario (denominada AND, notación $A \cdot B$) y complemento binario (denominada NOT, notación $\overline{A}$). Estas operaciones pueden describirse a través de ***tablas de verdad***, donde se indica el resultado de la operación para cada par de valores posibles.

$OR\ (A+B)$	$B=\mathbf{0}$	$B=\mathbf{1}$
$A=\mathbf{0}$	0	1
$A=\mathbf{1}$	1	1

$AND\ (A \cdot B)$	$B=\mathbf{0}$	$B=\mathbf{1}$
$A=\mathbf{0}$	0	0
$A=\mathbf{1}$	0	1

Reglas memotécnicas:

- En la operación OR, el resultado es 0 únicamente si los dos valores de entrada son 0.
- En la operación AND, el resultado es 1 únicamente si los dos valores de entrada son 1.

De acuerdo a estas definiciones, las propiedades de las operaciones se describen de la siguiente manera:

a) ***Propiedades fundamentales:***

Operación OR: $A+0=A$ $\quad A+1=1$ $\quad A+A=A$ $\quad A+\overline{A}=1$

Operación AND: $A\cdot 0=0$ $\quad A\cdot 1=A$ $\quad A\cdot A=A$ $\quad A\cdot\overline{A}=0$

Operación NOT: $\overline{\overline{A}}=A$

b) ***Propiedad conmutativa:*** $A+B=B+A$ $\qquad A\cdot B=B\cdot A$

c) ***Propiedad asociativa:*** $(A+B)+C=A+(B+C)$ $\qquad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

d) ***Propiedad distributiva:***

$(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$ $\qquad (A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$

e) ***Leyes de Morgan:*** $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ $\qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

f) ***Identidades:*** $A+(A\cdot B)=A$ $\qquad A\cdot(A+B)=A$ $\qquad A+(\overline{A}\cdot B)=A+B$

Absorción

Ejemplo 6: Construir tablas de verdad para verificar la primera ley de Morgan.

Solución:

Para resolver este ejercicio, debemos considerar que A y B pueden tomar los valores 0 ó 1, por lo que construimos dos tablas: una utilizando la expresión $\overline{A+B}$ y luego otra utilizando la expresión $\overline{A}\cdot\overline{B}$. Así podremos verificar la ley si logramos obtener dos tablas idénticas.

1) Usando $\overline{A+B}$: esta tabla es sencilla, ya que sólo debemos aplicar la operación NOT a la tabla de verdad vista anteriormente para la suma, es decir, escribimos el complemento de cada uno de los resultados originales de $A+B$:

$\overline{A+B}$	$B=\mathbf{0}$	$B=\mathbf{1}$
$A=\mathbf{0}$	1	0
$A=\mathbf{1}$	0	0

2) Usando $\overline{A}\cdot\overline{B}$: para este caso, podemos utilizar la tabla de verdad de la operación AND, pero debemos tener en cuenta que primero se invierte cada uno de los valores de entrada. Describimos las combinaciones posibles:

i) Si $A=0,\ B=0\ \Rightarrow\ \overline{A}=1,\ \overline{B}=1\ \Rightarrow\ \overline{A}\cdot\overline{B}=1\cdot 1=1$

ii) Si $A=0,\ B=1\ \Rightarrow\ \overline{A}=1,\ \overline{B}=0\ \Rightarrow\ \overline{A}\cdot\overline{B}=1\cdot 0=0$

iii) Si $A=1,\ B=0\ \Rightarrow\ \overline{A}=0,\ \overline{B}=1\ \Rightarrow\ \overline{A}\cdot\overline{B}=0\cdot 1=0$

iv) Si $A=1,\ B=1\ \Rightarrow\ \overline{A}=0,\ \overline{B}=0\ \Rightarrow\ \overline{A}\cdot\overline{B}=0\cdot 0=0$

Ahora que ya conocemos todas las combinaciones, armamos la tabla completando el resultado obtenido en cada una:

$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$B=\mathbf{0}$	$B=\mathbf{1}$
$A=\mathbf{0}$	1	0
$A=\mathbf{1}$	0	0

Así vemos que la tabla es idéntica a la obtenida usando la expresión $\overline{A+B}$, por lo tanto podemos asegurar que $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

3.2. Funciones booleanas

Un ***función booleana*** es una función cuyas variables de entrada pueden tomar únicamente los valores 0 y 1, y cuya imagen son ambos valores 0 y 1. Formalmente, definimos el conjunto $B=\{0,1\}$ y para una función f con n variables de entrada escribimos: $f:B^n\to B$

Existen diferentes formas de representar a una función binaria: a través de su expresión algebraica, con tablas de verdad, en forma numérica y en forma gráfica. En este curso sólo veremos los dos primeros casos, ya que los restantes tienen mayor aplicación en electrónica digital.

Ejemplo 7: Una función booleana tiene la expresión $f=A+B\cdot A$. Identificar la cantidad de variables y construir una tabla de verdad.

Solución:

La cantidad de variables es la cantidad de letras diferentes que vemos en la expresión de la función (que es la expresión algebraica). En este caso, tenemos dos variables A y B. Como son variables booleanas, sólo pueden tomar los valores 0 y 1, entonces la tabla de verdad se puede construir analizando las combinaciones posibles:

i) Si $A=0,\ B=0 \ \Rightarrow \ \ A+B\cdot A=0+0\cdot 0=0+0=0$

ii) Si $A=0,\ B=1 \ \Rightarrow \ \ A+B\cdot A=0+1\cdot 0=0+0=0$

iii) Si $A=1,\ B=0 \ \Rightarrow \ \ A+B\cdot A=1+0\cdot 1=1+0=1$

iv) Si $A=1,\ B=1 \ \Rightarrow \ \ A+B\cdot A=1+1\cdot 1=1+1=1$

Observación: el operador lógico AND tiene prioridad sobre el operador OR, por eso no es necesario usar paréntesis.

A + B · A = A + (B · A)

Por lo tanto la tabla de verdad resulta de la siguiente manera:

$A+B\cdot A$	$B=\mathbf{0}$	$B=\mathbf{1}$
$A=\mathbf{0}$	0	0
$A=\mathbf{1}$	1	1

El procedimiento del ejemplo anterior es práctico para funciones de pocas variables y cuya expresión algebraica no contiene demasiados términos. Para otros casos, escribir las combinaciones y evaluar cada término puede resultar muy extenso. Por este motivo, es conveniente simplificar, si es posible, la expresión de la función antes de analizar las combinaciones.

Ejem

Ejemplo 8: Utilizar las propiedades de las operaciones booleanas para simplificar la expresión de la función $f=(A\cdot B\cdot C)+(B\cdot C)+(\overline{A}\cdot B)$

Solución:

$$f=A\cdot(B\cdot C)+(B\cdot C)+(\overline{A}\cdot B) \qquad (prop.\ asociativa)$$

$$f=A\cdot(B\cdot C)+1\cdot(B\cdot C)+(\overline{A}\cdot B) \qquad (prop.\ fundamental\ del\ producto)$$

$$f=(A+1)\cdot(B\cdot C)+(\overline{A}\cdot B) \qquad (prop.\ distributiva)$$

$$f=1\cdot(B\cdot C)+(\overline{A}\cdot B) \qquad (prop.\ fundamental\ de\ la\ suma)$$

$$f=B\cdot(C)+B\cdot(\overline{A}) \qquad (prop.\ asociativa\ y\ conmutativa\ del\ producto)$$

$$f=B\cdot(C+\overline{A}) \qquad (prop.\ distributiva)$$

Ejem

Ejemplo 9: Utilizar las propiedades de las operaciones booleanas para simplificar la expresión de la función $f=\overline{(\overline{A+B})\cdot(\overline{A\cdot D})}$

Solución:

$$f=\overline{(\overline{A+B})\cdot(\overline{A\cdot D})}$$

$$f=\overline{(\overline{A+B})}+\overline{(\overline{A\cdot D})} \qquad (ley\ de\ Morgan)$$

$$f=(A+B)+(A\cdot D) \qquad (operación\ NOT)$$

$$f=B+(A+A\cdot D) \qquad (prop.\ asociativa)$$

$$f=B+A \qquad (identidad)$$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para este tema, utilizaremos varios conceptos conocidos sobre funciones lineales y rectas, por lo que presentamos a continuación un repaso de los más importantes y algunas deducciones que surgen de ellos.

a. La ecuación de una recta, expresada en forma de función lineal, la indicamos generalmente como $y=m\cdot x+c$, donde m es la pendiente y c es la ordenada al origen.

b. Otra forma de expresar una ecuación de recta es en la forma $a\cdot x+b\cdot y=c$. En este caso, si despejamos y, la pendiente se obtiene como $m=-a/b$.

c. El gráfico de una función lineal es una recta oblicua en el caso de que la pendiente sea distinta de 0, y es horizontal en el caso de que la pendiente sea 0.

d. Una recta vertical no es una función lineal, y su ecuación es de la forma $x=c$.

e. Resolver una ecuación lineal es hallar el valor de la variable independiente que la verifica.

4.1 Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

4.1.1 Forma general

Un ***sistema de ecuaciones lineales con dos variables*** *x* e *y* se compone de dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$$

donde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ son seis constantes. Un par de valores de *x* e *y* es una ***solución*** del sistema si satisface *ambas ecuaciones a la vez.*

De la definición anterior, vemos que resolver un sistema de ecuaciones significa hallar el o los pares de valores de las incógnitas que verifican las ecuaciones dadas.

Ejemplo 10: Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 2 \cdot y = 12 \\ 6 \cdot x - 1 \cdot y = 2 \end{cases}$$

a) Comprobar que el par de valores $x = 1, y = 4$ es una solución del sistema.
b) Comprobar que el par de valores $x = 2, y = 2$ no es una solución del sistema.

Solución:

a) Para comprobar si el par de valores dado es solución del sistema, evaluamos ambas ecuaciones reemplazando los valores de x e y:

$$4 \cdot (1) + 2 \cdot (4) = 4 + 8 = 12$$
$$6 \cdot (1) - 1 \cdot (4) = 6 - 4 = 2$$

Como podemos observar, ambos resultados coinciden con los correspondientes al sistema, es decir: la primera ecuación da como resultado 12 y la segunda da como resultado 2.

b) Para este segundo par de valores, nuevamente evaluamos ambas ecuaciones reemplazando los valores de x e y:

$$4 \cdot (2) + 2 \cdot (2) = 8 + 4 = 12$$
$$6 \cdot (2) - 1 \cdot (2) = 12 - 2 = 10$$

En este caso, sólo coincide el resultado de la primera ecuación, pero no de la segunda (debería haber dado 2). Entonces, no se satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente, por lo que el par de valores $x = 2, y = 2$ no es una solución del sistema.

A partir del ejemplo anterior, podemos concluir que verificar si un par de valores es solución de un sistema dado consiste simplemente en reemplazar los valores en ambas ecuaciones y comprobar si obtenemos los resultados correspondientes. Sin embargo, en la práctica generalmente no vamos a conocer estos pares de valores anticipadamente, sino que tendremos la tarea de hallarlos. Para ello existen diversos métodos que describen un procedimiento adecuado para resolver el sistema, aunque en este curso sólo se presentarán los dos más comunes, conocidos como *Método de Sustitución* y *Método de Eliminación de Gauss*.

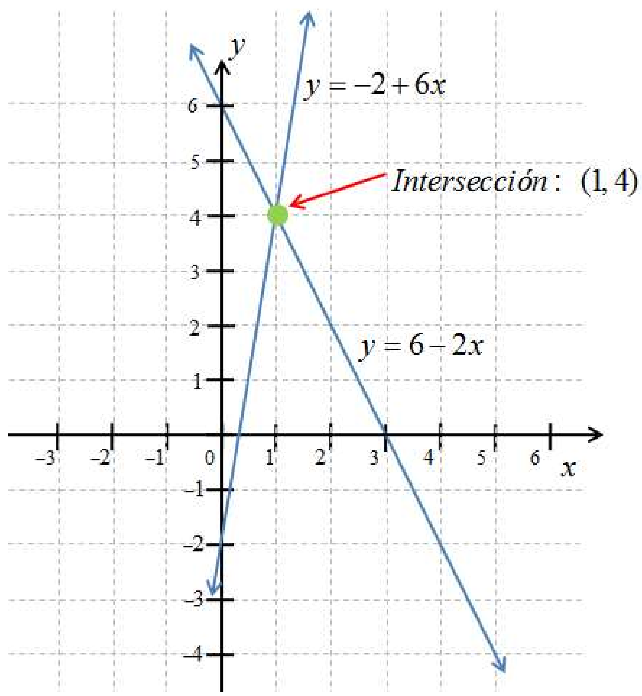
Antes de comenzar con las técnicas de resolución, realizaremos una interpretación geométrica teniendo en cuenta que cada una de las ecuaciones que forman el sistema puede considerarse como una función lineal, cuyo gráfico en el plano es una recta. Si de cada una de las ecuaciones del ejemplo 1 despejamos "y", obtenemos:

$$4 \cdot x + 2 \cdot y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12 - 4x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 6 - 2x$$

$$6 \cdot x - 1 \cdot y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2 - 6x}{-1} \quad \Rightarrow \quad y = -2 + 6x$$

Si graficamos ambas funciones, como se muestra en la figura 1, vemos que el par de valores que es solución del sistema, coincide con el punto de intersección de las rectas. Esta observación permite una interpretación gráfica de la solución, no sólo para este ejemplo, sino que puede generalizarse para otros casos. Sin embargo, podemos anticipar el hecho de que no todas las rectas se cortan en un punto, lo cual da origen a tres situaciones específicas, que se presentan en las siguientes secciones.

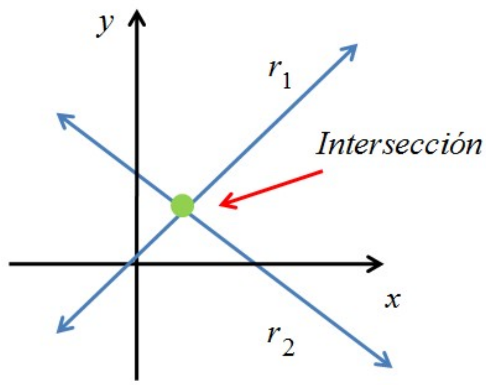
FIGURA 1. Interpretación gráfica de la solución del ejemplo 1.



4.1.2 Sistema con solución única

Tal como sucede en el ejemplo 10, existen ocasiones donde dos rectas se intersectan en un único punto, por lo que el sistema de ecuaciones sólo podrá tener una única solución. En forma general, esta situación se produce cuando las rectas tienen distinta pendiente, a partir de lo cual se genera el único punto de intersección.

FIGURA 2. Sistema de dos ecuaciones con una solución.



Ejemplo 11: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4\cdot x+2\cdot y=10 \\ 8\cdot x-10\cdot y=6 \end{cases}$$

Solución:

Método 1: Sustitución

Para aplicar este método, primero elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las variables. Si elegimos la primera ecuación para despejar "y", nos queda:

$$4\cdot x+2\cdot y=10 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10-4x}{2} \quad \Rightarrow \quad y=5-2x$$

A continuación, reemplazamos "y" en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} y=5-2x \\ 8x-10y=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 8x-10(5-2x)=6$$

Y así logramos obtener una nueva ecuación que sólo contiene a la variable "x". Resolviendo esta ecuación de la manera ya conocida:

$$8x-10(5-2x)=6 \quad \Rightarrow \quad 8x-50+20x=6 \quad \Rightarrow \quad 28x=56 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Ya tenemos el valor de "x", para obtener el valor de "y" utilizamos el primer despeje y reemplazamos x=2:

$$y=5-2x=5-2(2)=5-4=1$$

Por lo tanto, la solución del sistema es el par $x=2,\ y=1$. En notación de conjunto, se indica $S=\{(x,y)=(2,1)\}$.

Método 2: Eliminación de Gauss

Este método se basa en la equivalencia de ecuaciones a partir de multiplicaciones por constantes y sumas o restas miembro a miembro. Como idea general, se busca lograr que los coeficientes para una de las variables sean iguales en ambas ecuaciones, para luego sumarlas o restarlas y lograr obtener una nueva ecuación donde esta variable desaparece.

Para el ejemplo, si multiplicamos la primera ecuación por 2 a ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{cases} 2\cdot(4\cdot x+2\cdot y)=2\cdot 10 \\ 8\cdot x-10\cdot y=6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 8\cdot x+4\cdot y=20 \\ 8\cdot x-10\cdot y=6 \end{cases}$$

Como vemos, el nuevo sistema tiene los mismos coeficientes en la variable "x", por lo que podemos restar ambas ecuaciones para eliminar esta variable y poder hallar el valor de "y" :

$$\begin{cases} 8\cdot x+4\cdot y=20 \\ 8\cdot x-10\cdot y=6 \end{cases} \Rightarrow\ 8\cdot x+4\cdot y-(8\cdot x-10\cdot y)=20-(6) \ \Rightarrow\ 14y=14 \ \Rightarrow\ y=1$$

Si ahora reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones originales, podemos determinar el valor de "x" :

$$4\cdot x+2\cdot(1)=10 \quad\Rightarrow\quad 4x=8 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

Por lo tanto, la solución del sistema es el par $x=2,\ y=1$.

Obviamente, las soluciones obtenidas al aplicar cualquiera de los métodos deben ser las mismas. Veamos ahora que el par de valores hallados es la **única solución**.

Si despejamos "y" en cada una de las ecuaciones, obtenemos:

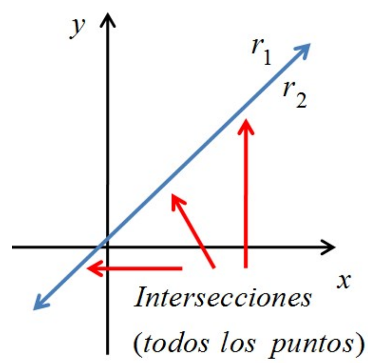
$$\begin{cases} 4\cdot x+2\cdot y=10 \\ 8\cdot x-10\cdot y=6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=\dfrac{10-4x}{2}=5-2x \\ y=\dfrac{6-8x}{-10}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}x \end{cases}$$

Las pendientes de estas rectas son (-2) y (4/5), respectivamente. En consecuencia, al ser diferentes, sus gráficas sólo se intersectan en un único punto.

4.1.3 Sistema con infinitas soluciones

Otra situación que puede presentarse en la resolución de un sistema es el caso de rectas coincidentes, por lo que se intersectan en todos sus puntos y decimos que el sistema tiene infinitas soluciones. Gráficamente, estas rectas se superponen, por tener la misma pendiente y la misma ordenada al origen.

FIGURA 3. Sistema con infinitas soluciones



Ejemplo 12: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \\ 10 \cdot x + 6 \cdot y = 4 \end{cases}$$

Solución:

Vamos a plantear la resolución con el método de sustitución. Despejamos "y" de la primera ecuación, para reemplazar luego en la segunda:

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \\ 10 \cdot x + 6 \cdot y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2-5x}{3} \\ 10 \cdot x + 6 \cdot y = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 10 \cdot x + 6 \cdot \left(\dfrac{2-5x}{3} \right) = 4$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot x + 4 - 10x = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 4$$

Lo que sucede aquí es que al reemplazar desaparece la variable "x", y llegamos a la expresión 4=4, la cual es una afirmación correcta que no depende de ninguno de los valores de "x" o de "y". Por lo tanto, decimos que el sistema tiene infinitas soluciones, lo cual significa que podemos elegir cualquier par de valores que verifique una de las ecuaciones y con seguridad podemos afirmar que también verificará la ecuación restante.

Para realizar la interpretación gráfica, despejamos "y" de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 5\cdot x+3\cdot y=2 \\ 10\cdot x+6\cdot y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2-5x}{3} \\ y=\dfrac{4-10x}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}x \\ y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}x \end{cases}$$

Claramente, se obtiene la misma expresión en ambos casos, de manera que las rectas tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen, es decir, sus gráficas son rectas coincidentes.

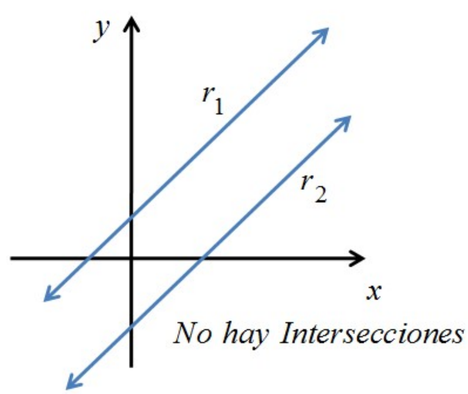
En estos casos, indicamos una respuesta genérica, que se conoce como *solución en forma paramétrica*. Si elegimos un valor "a" para una de las variables, por ejemplo "x", el valor de "y" debe respetar la ecuación correspondiente. Entonces, la solución en forma paramétrica en este ejemplo es:

$$S=\left\{(x,y)=(a,\tfrac{2}{3}-\tfrac{5}{3}a),\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

4.1.3 Sistema sin soluciones

La restante situación posible es el caso en el que no es posible hallar un par de valores que verifique las dos ecuaciones simultáneamente. Esto sucederá si las rectas no se intersectan, y como vimos en la unidad de funciones, corresponde al caso de rectas con la misma pendiente y distinta ordenada al origen. La interpretación gráfica es la que se muestra en la figura siguiente.

FIGURA 4. Sistema sin solución.



Ejemplo 13: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -10\cdot x+2\cdot y=12 \\ 20\cdot x-4\cdot y=4 \end{cases}$$

Solución:

Vamos a plantear la resolución con el método de eliminación de Gauss. Multiplicamos la primera ecuación por 2 (siempre a ambos miembros):

$$\begin{cases} -10\cdot x+2\cdot y=12 \\ 20\cdot x-4\cdot y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot(-10\cdot x+2\cdot y)=2\cdot 12 \\ 20\cdot x-4\cdot y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20\cdot x+4\cdot y=24 \\ 20\cdot x-4\cdot y=4 \end{cases}$$

Como vemos, el nuevo sistema tiene los mismos coeficientes en la variable "x" aunque con signos opuestos, por lo que podemos sumar ambas ecuaciones para eliminar esta variable:

$$\begin{cases} -20\cdot x+4\cdot y=24 \\ 20\cdot x-4\cdot y=4 \end{cases} \Rightarrow -20\cdot x+4\cdot y+(20\cdot x-4\cdot y)=\overset{24}{\cancel{2}}+(4) \Rightarrow 0=\overset{28}{\cancel{6}}$$

Lo que vemos aquí es que además de cancelar las "x", se cancelaron al mismo tiempo las "y", llegando a la expresión final 0=6. Como esta última expresión es falsa, debemos concluir que no es posible hallar un par de valores que verifiquen ambas ecuaciones al mismo tiempo, es decir, el sistema no tiene solución.

4.2 Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas

4.2.1 Forma general

Un ***sistema de m ecuaciones lineales con n variables*** se compone de un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}$$

donde $a_{11},a_{12},...,a_{mn}$ y $b_1,b_2,...,b_m$ son todas constantes. Las incógnitas o variables son $x_1,x_2,...,x_n$, y un conjunto de valores de ellas es una ***solución*** del sistema si satisface *las m ecuaciones a la vez.* El caso particular de $m=n$ significa que tenemos el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, y decimos que el sistema es de ***orden n***.

4.2.2 Sistemas de orden 3

En esta materia, nos interesan en particular los sistemas con igual número de ecuaciones y de incógnitas, donde se pueden aplicar las técnicas presentadas anteriormente. A continuación veremos algunos ejemplos para sistemas de orden 3, es decir que debemos hallar 3 incógnitas para verificar simultáneamente 3 ecuaciones.

Para simplificar la notación, en lugar de nombrar a las variables como x_1, x_2, x_3, las llamaremos directamente x, y, z.

Ejemplo 14: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 \\ 4\cdot x + 3\cdot y + \quad z = 18 \\ 6\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = 2 \end{cases}$$

Solución:

Aplicaremos la técnica de eliminación de Gauss. En la práctica, es habitual numerar cada ecuación y utilizar una notación para indicar la operación que se realiza en cada paso. En este caso, podemos indicar:

$$E2 - 2\cdot E1 \rightarrow E2$$

que indica: la segunda ecuación se reemplaza por el resultado de restar la ecuación original menos el doble de la primera. Detallando este paso tenemos:

$$\begin{array}{lll} (E2) & 4\cdot x + 3\cdot y + \quad z \quad = 18 & \qquad 4\cdot x + 3\cdot y + \quad z = 18 \\ 2\cdot(E1) & 2\cdot(2\cdot x + \quad y - 3\cdot z) = 2\cdot 4 \;\Rightarrow & - \underline{4\cdot x + 2\cdot y - 6\cdot z = 8} \\ & & \qquad 0\cdot x + 1\cdot y + 7\cdot z = 10 \end{array}$$

Por otro lado, también reemplazamos la tercera ecuación por la resta de ella con el triple de la primera: $E3 - 3\cdot E1 \rightarrow E3$

$$\begin{array}{lll} (E3) & 6\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = 2 & \qquad 6\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = 2 \\ 3\cdot(E1) & 3\cdot(2\cdot x + \quad y - 3\cdot z) = 3\cdot 4 \;\Rightarrow & - \underline{6\cdot x + 3\cdot y - 9\cdot z = 12} \\ & & \qquad 0\cdot x - 5\cdot y + 5\cdot z = -10 \end{array}$$

Es importante destacar que las operaciones realizadas deben tener como objetivo cancelar una de las variables en cada ecuación, en base a lo cual se eligen los factores por los cuales multiplicar. Así obtenemos un sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 & (E1) \\ 4\cdot x + 3\cdot y + \quad z = 18 & (E2) \\ 6\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = 2 & (E3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 & (E1) \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 7\cdot z = 10 & (E2 - 2\cdot E1 \rightarrow E2) \\ 0\cdot x - 5\cdot y + 5\cdot z = -10 & (E3 - 3\cdot E1 \rightarrow E3) \end{cases}$$

Como ya hemos logrado eliminar el término en "x" en las dos primeras ecuaciones, buscaremos la forma de eliminar "y" en la última ecuación. Para lograrlo, multiplicaremos la segunda ecuación por 5 y se la sumamos a la tercera:

$$\begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 & (E1) \\ \qquad 1\cdot y + 7\cdot z = 10 & (E2) \\ \quad -5\cdot y + 5\cdot z = -10 & (E3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 & (E1) \\ \qquad 1\cdot y + 7\cdot z = 10 & (E2) \\ \qquad 0\cdot y + 40\cdot z = 40 & (E3 + 5\cdot E2 \to E3) \end{cases}$$

De la última ecuación, podemos despejar el valor de "z":

$$40\cdot z = 40 \;\Rightarrow\; z = 1$$

Conociendo esta incógnita, utilizamos las ecuaciones para despejar las restantes:

$$\begin{cases} \qquad z = 1 \\ (E2)\;\; y + 7\cdot 1 = 10 \;\Rightarrow\; y = 3 \\ (E1)\;\; 2x + (3) - 3\cdot(1) = 4 \;\Rightarrow\; x = 2 \end{cases}$$

Entonces el sistema tiene una única solución: y es el conjunto de valores $S = \{(x, y, z) = (2, 3, 1)\}$.

Ejemplo 15: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 4 \\ 2x + 2y - 8z = -4 \\ 3x - 6y + 15z = 12 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 4 & (E1) \\ 2x + 2y - 8z = -4 & (E2) \\ 3x - 6y + 15z = 12 & (E3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 4 & (E1) \\ 0x + 6y - 18z = -12 & (E2 - 2E1 \to E2) \\ 0x - 0y + 0z = 0 & (E3 - 3E1 \to E3) \end{cases}$$

Aquí vemos que en la tercera ecuación se cancelan las tres variables y se obtiene la expresión 0=0, lo cual es verdadero. Como vimos anteriormente, esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones y es posible indicar la respuesta en forma paramétrica. Si despejamos "y" de la segunda ecuación y luego "x" de la primera:

$$6y - 18z = -12 \quad\Rightarrow\quad y = -2 + 3z$$
$$x - 2y + 5z = 4 \;\Rightarrow\; x - 2(-2 + 3z) + 5z = 4 \;\Rightarrow\; x = 2z$$

Si elegimos un valor "a" para la variable "z", la solución es:

$$S = \{(x, y, z) = (2a, -2 + 3a, a),\; a \in \mathbb{R}\}$$

5. MATRICES

Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 6y + 15z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 4y + 9z = 0 \\ x - 8y + 7z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ambos sistemas son de dimensión 3x3 (3 ecuaciones con 3 incógnitas). Las incógnitas en ambos casos son los valores de x, y, z. Entonces, lo único que se diferencia entre ambos sistemas son los coeficientes que forman cada ecuación. Si nos enfocamos en estos coeficientes, los podríamos indicar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -8 \\ 3 & -6 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -8 & 7 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta forma de notación permite una representación más compacta y cómoda para realizar operaciones algebraicas, y recibe un nombre particular que presentamos a continuación.

5.1. Definiciones

Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de números, organizados en m renglones (o filas) y n columnas. Se dice que la matriz es de ***orden*** (o dimensión) m x n, y se indica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & a_{ij} & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La notación a_{ij} se utiliza para identificar a cada valor particular en la matriz, donde el subíndice i corresponde a la fila y el subíndice j corresponde a la columna.

Para este curso, utilizaremos letras mayúsculas para identificar matrices, y la correspondiente letra en minúscula para identificar a sus elementos. Por ejemplo, si llamamos M a una cierta matriz, sus elementos los indicaremos como m_{ij}. La definición anterior es la forma general de cualquier matriz, y podemos distinguir además dos casos particulares:

Una matriz que tiene un solo renglón se denomina ***matriz renglón*** o ***vector renglón***. Una matriz que tiene una sola columna se denomina ***matriz columna*** o ***vector columna***. Una matriz que tiene el mismo número de renglones que de columnas se llama ***matriz cuadrada***.

Además:

Dos matrices A y B se dicen ***iguales*** si y sólo si tienen la misma dimensión y todos sus elementos iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$.

La ***transpuesta*** de una matriz A de dimensión m x n es la matriz de dimensión n x m cuyo i-ésimo renglón es igual a la i-ésima columna de A. Se indica A^T.

La definición de matriz transpuesta equivale a decir que la nueva matriz tiene los renglones intercambiados con las columnas. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 16: Dada las matrices $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, indicar: i) la dimensión de cada matriz; ii) los elementos m_{22}, h_{13}; iii) ¿las matrices son iguales?; iv) las matrices M^T, H^T.

Solución:

i) M tiene 2 renglones y 2 columnas, por lo que su dimensión es 2x2. H tiene 2 renglones y 3 columnas, por lo que su dimensión es 2x3. En particular, M es una matriz cuadrada y decimos que es de orden 2 (igual número de renglones y columnas).

ii) Dentro de la matriz M, si intersectamos el segundo renglón con la segunda columna, vemos el valor 5, por lo tanto: $m_{22} = 5$. Dentro de la matriz H, si intersectamos el primer renglón con la tercera columna, vemos el valor 6, por lo tanto: $h_{13} = 6$.

iii) Aunque algunos elementos coinciden, las matrices no son iguales porque no tienen la misma dimensión.

iv) Como M es de dimensión 2x2, su transpuesta M^T será de dimensión 2x2 y como H es de dimensión 2x3, su transpuesta H^T será de dimensión 3x2.

$$M=\begin{bmatrix}3&6\\1&5\end{bmatrix}\Rightarrow M^T=\begin{bmatrix}3&1\\6&5\end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix}3&7&6\\1&4&5\end{bmatrix}\Rightarrow H^T=\begin{bmatrix}3&1\\7&4\\6&5\end{bmatrix}$$

Para el caso de matrices cuadradas, son útiles las siguientes definiciones:

En una matriz cuadrada A de orden n, la ***diagonal principal*** corresponde al conjunto de elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Si todos los demás elementos son cero, se dice que A es una ***matriz diagonal***. Si todos los valores debajo de la diagonal principal son cero, se dice que A es una ***matriz triangular superior***. Análogamente, si todos los valores arriba de la diagonal principal son cero, se dice que A es una ***matriz triangular inferior***.

Una matriz diagonal cuyos elementos son todos iguales a 1, se dice que es una ***matriz identidad***.

Ejemplo 17: Dada la matriz $M=\begin{bmatrix}1&5&2\\4&3&6\\9&7&8\end{bmatrix}$, indicar: i) los elementos de la diagonal principal; ii) ¿es una matriz triangular superior?; iii) ¿qué valores se deberían modificar para que se convierta en una matriz triangular inferior?

Solución:

i) La diagonal principal está formada por los elementos $\overset{m}{\cancel{a}}_{11}, \overset{m}{\cancel{a}}_{22}, \overset{m}{\cancel{a}}_{33}$, que corresponden a los valores 1,3 y 8.

ii) No es una matriz triangular superior, ya que los elementos por debajo de la diagonal principal no son iguales a 0.

iii) Para lograr que sea una matriz triangular inferior, debemos hacer que todos los elementos por encima de la diagonal principal sean 0. Entonces:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&3&0\\9&7&8\end{bmatrix}$$

5.2. Operaciones con matrices

Dadas un valor real k y dos matrices A y B de dimensión m x n, con elementos a_{ij}, b_{ij} respectivamente, definimos:

1) La matriz suma $S = A + B$ de dimensión m x n cuyos elementos se calculan como $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2) La matriz resta $R = A - B$ de dimensión m x n cuyos elementos se calculan como $r_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

3) El producto de un escalar por una matriz $P = k \cdot A$ de dimensión m x n cuyos elementos se calculan como $p_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Ejemplo 18: Dadas la matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcular:

$S = A + B, \quad R = A - B, \quad P = 3 \cdot A$.

Solución:

Siguiendo las definiciones, la suma y resta se calculan elemento a elemento:

$$S = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 5+5 & 2+9 \\ 4+3 & 3+8 & 6+7 \\ 9+2 & 7+6 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 11 \\ 7 & 11 & 13 \\ 11 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

$$S = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 5-5 & 2-9 \\ 4-3 & 3-8 & 6-7 \\ 9-2 & 7-6 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & -1 \\ 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Y el producto de un escalar por una matriz consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por el valor dado:

$$P = 3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 9 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 6 \\ 12 & 9 & 18 \\ 27 & 21 & 24 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo anterior vemos que las operaciones de suma y resta de matrices requieren que las matrices tengan exactamente la misma dimensión, pero pueden interpretarse de manera sencilla, al igual que el producto por un escalar. Además, conservan las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva que ya conocemos. Sin embargo, no hemos definido aún el producto entre matrices, y esto se debe a que el procedimiento es más elaborado, por lo que comenzaremos con un caso particular antes de la definición general.

Dada una matriz renglón A de dimensión 1 x n y una matriz columna B de dimensión n x 1, con elementos a_{1j}, b_{i1} respectivamente, definimos su **producto interno** como la suma de los factores obtenidos al multiplicar cada elemento de A por el correspondiente elemento de B en su mismo orden. El resultado obtenido es un número real (no una matriz) y lo expresamos como $p = \sum_{i=j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{i,1}$.

Ejemplo 19: Dadas la matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcular : $p = A \cdot B$

Solución:

En primer lugar, debemos observar que la operación sólo es posible si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de renglones de la segunda. En este ejemplo, podemos verificarlo observando que esta cantidad es 4. Entonces, el procedimiento consiste en multiplicar entre sí los primeros elementos de cada matriz, luego los dos segundos, y así sucesivamente, calculando la suma total de todos los productos obtenidos:

$$p = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 10 + 6 - 3 + 0 = 13$$

Si vemos el ejemplo, la matriz columna está escrita en forma vertical, por lo que si queremos realizar esta operación con una matriz de muchos renglones, necesitaríamos mucho espacio en la hoja. Es por esto que habitualmente utilizamos una notación alternativa, aplicando el concepto de matriz transpuesta: una matriz columna se puede expresar como la traspuesta de una matriz renglón. Repitiendo el ejemplo anterior con esta notación, indicaríamos $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, entonces:

$$p = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 10 + 6 - 3 + 0 = 13$$

Dada una matriz A de dimensión m x n y una matriz B de dimensión n x q, con elementos a_{ij}, b_{ij} respectivamente, definimos su **producto** de la siguiente manera: la matriz resultado P es de dimensión m x q, cuyo elemento p_{ij} se calcula como la suma de los factores obtenidos al multiplicar el renglón i de A por la columna j de B. $p_{ij} = \sum_{h=1}^{q} a_{ih} \cdot b_{hj}$.

Ejemplo 20: Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$, calcular $P = \overset{A}{\cancel{M}} \cdot B$.

Solución:

Antes de comenzar, debemos comprobar si es posible efectuar la operación, teniendo en cuenta que la primera matriz tiene 3 columnas y la segunda matriz tiene 3 renglones. Como esta cantidad coincide, es posible calcular el producto y la matriz resultado tendrá dimensión 2 x 4. Para ejemplificar el procedimiento, vamos a calcular inicialmente el elemento que se ubicará en el primer renglón y la primera columna, es decir p_{11}. De acuerdo a la definición, debemos multiplicar el primer renglón de A por la primera columna de B:

$$p_{11} = \sum_{h=1}^{3} a_{1h} \cdot b_{h1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 10$$

Debemos repetir este procedimiento para hallar cada elemento de la matriz resultado. Por ejemplo, al llegar al elemento p_{23}, debemos multiplicar el segundo renglón de A por la tercera columna de B:

$$p_{24} = \sum_{h=1}^{3} a_{2h} \cdot b_{h4} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 57$$

Una vez que calculamos todos los elementos, armamos la matriz final. Los dos valores hallados se ubican en las posiciones que se muestran a continuación, y se propone como ejercicio completar los valores faltantes.

$$P = \begin{bmatrix} 10 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 57 \end{bmatrix}$$

Es importante mencionar que el producto de matrices No es conmutativo. En el caso de matrices cuadradas, el producto $A \cdot B$ será diferente de $B \cdot A$, y en el caso de matrices no cuadradas, al menos uno de los órdenes no se puede evaluar ya que no coincidirán la cantidad de columnas de la primera con la cantidad de renglones de la segunda. En el ejemplo anterior, no hubiese sido posible evaluar $P = B \cdot A$, ya que B tiene 4 columnas y A tiene sólo 2 renglones.

5.3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Como se mencionó en la introducción, las matrices son una herramienta útil para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 2 \cdot y = 12 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y = 14 \end{cases}$$

Utilizando producto de matrices, es posible escribir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes, X al vector columna con las incógnitas x e y, B al vector columna de constantes, lo anterior se puede expresar como:

$$A \cdot X = B$$

Decimos entonces que este es el sistema expresado en ***forma matricial***.

Adicionalmente, definimos la matriz aumentada, que consiste en agregar el vector de constantes como última columna de la matriz de coeficientes:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

A partir de esta matriz aumentada, podemos aplicar el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema mediante operaciones entre renglones. Recordemos la notación:

$k \cdot R_i$ significa multiplicar todos los elementos del renglón i por la constante k.

$R_i + R_j$ significa sumar elemento a elemento los renglones i y j.

$R_i + k \cdot R_j \rightarrow R_i$ significa multiplicar el renglón j por la constante k, luego sumarlo al renglón i, y reemplazar el resultado en el renglón i. Por simplicidad, se puede escribir sólo $R_i + k \cdot R_j \rightarrow$ a la altura del renglón que se desea reemplazar.

Ejemplo 21: Resolver el sistema $\begin{cases} 4 \cdot x + 2 \cdot y = 12 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y = 14 \end{cases}$ usando la forma matricial.

Solución:

Partimos de la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

Realizando operaciones entre renglones, intentaremos obtener una matriz triangular superior en la parte de la izquierda. Recordemos que esto significa que los elementos por debajo de la diagonal principal deben ser 0.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_1 - 2 \cdot R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 0 & -4 & -16 \end{array}\right]$$

Esta matriz obtenida es una forma de matriz reducida, y si la convertimos al sistema de ecuaciones equivalente tendremos:

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 2 \cdot y = 12 \\ 0 \cdot x - 4 \cdot y = -16 \end{cases}$$

En donde de la segunda ecuación se puede despejar fácilmente que $y = -16/(-4) = 4$, y reemplazando en la primera se obtiene $x = (12 - 2 \cdot 4)/4 = 1$.

El ejemplo anterior es sencillo y puede resolverse con sólo una operación entre renglones. Para sistemas de mayor dimensión, necesitaremos más pasos.

Ejemplo 22: Resolver el sistema $\begin{cases} 2 \cdot x + y - 3 \cdot z = 4 \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y + z = 18 \\ 6 \cdot x - 2 \cdot y - 4 \cdot z = 2 \end{cases}$ usando la forma matricial.

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 18 \\ 6 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2\cdot R_1 \rightarrow \\ R_3 - 3\cdot R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 5\cdot R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente será:

$$\begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 \\ \qquad 1\cdot y + 7\cdot z = 10 \\ \qquad\qquad 40\cdot z = 40 \end{cases}$$

De la última ecuación despejamos $z=1$, y reemplazando en las anteriores obtenemos $y=3,\ x=2$.

5.4. Matriz inversa y determinante

En la sección anterior vimos que la técnica de eliminación de Gauss se puede aplicar sobre matrices para la resolución de un sistema de ecuaciones, pero este no es el único camino posible. Si pensamos en la expresión matricial $A\cdot X = B$ donde X contiene las incógnitas, otra alternativa podría ser "despejar" X a partir de la ecuación. Sin embargo, este procedimiento requiere definir la inversa multiplicativa de una matriz.

Dada una matriz cuadrada A, se dice que es ***invertible*** si existe una matriz, que notamos A^{-1}, tal que $A^{-1}\cdot A = I$, donde I es la matriz identidad.

Si A es invertible, entonces la solución de la ecuación matricial $A\cdot X = B$ es $X = A^{-1}\cdot B$.

Ejemplo 23: Verificar que la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

Solución:

Comprobamos si al realizar el producto se obtiene la matriz identidad (es decir, una matriz diagonal con elementos iguales a 1).

$$A^{-1}\cdot A = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3/8)\cdot 4-(1/4)\cdot 2 & (3/8)\cdot 2-(1/4)\cdot 3 \\ (-1/4)\cdot 4+(1/2)\cdot 2 & (-1/4)\cdot 2+(1/2)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejem

Ejemplo 24: Utilizar el ejercicio anterior para hallar la solución del sistema
$$\begin{cases} 4\cdot x+2\cdot y=12 \\ 2\cdot x+3\cdot y=14 \end{cases}$$

Solución:

En este caso tenemos:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Como ya sabemos que la inversa de A es $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$, podemos utilizarla para calcular X:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 12 \\ 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3/8)\cdot 12-(1/4)\cdot 14 \\ (-1/4)\cdot 12+(1/2)\cdot 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Es decir: $x=1,\ y=4$. Observemos que este es el mismo sistema que habíamos resuelto anteriormente, lo que nos sirve para comparar los resultados y notar que obtenemos la misma solución.

Entonces, si conocemos la matriz inversa, es sencillo calcular la solución a partir del producto $A^{-1}\cdot B$. Pero hasta ahora sólo hemos podido hacerlo en un caso donde la matriz inversa es conocida, veremos a continuación el procedimiento para hallarla a partir de la matriz original.

Seguimos utilizando el ejemplo anterior, es decir la matriz de coeficientes $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Para comenzar, debemos armar una nueva matriz en la cual agregamos la matriz identidad a la derecha de A:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La línea punteada se utiliza como referencia para distinguir las dos partes. El procedimiento consiste en efectuar las operaciones por renglones necesarias para que la parte izquierda se convierta en una matriz identidad:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1/4\rightarrow \\ R_2/2\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2-R_1\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1-R_2/2\rightarrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3/8 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array}\right]$$

Una vez que obtenemos la matriz identidad, la parte de la izquierda será la inversa que estamos buscando, en este caso $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$. Si en algún caso no estamos seguros del resultado obtenido o sospechamos que puede existir un error de cuentas, se puede calcular el producto $A^{-1} \cdot A$ para comprobar que se llega a la matriz identidad (en este caso ya lo verificamos en un ejemplo previo).

Es importante destacar que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Con la técnica presentada anteriormente, es posible que luego de algunos pasos, veamos que no hay más opciones para intentar obtener la matriz identidad, y en tales casos diremos que la matriz no es invertible. En la próxima sección presentamos otra técnica para resolver sistemas de ecuaciones a partir de su forma matricial, realizando un cálculo inicial para determinar si la matriz de coeficientes es invertible o no.

Antes de conocer esta técnica de resolución de sistemas, necesitamos definir el concepto de determinante. Esta definición puede darse de una forma general para matrices cuadradas de cualquier dimensión, pero en este curso utilizaremos una forma alternativa de acuerdo al tamaño de cada matriz, para una mejor interpretación.

Dada una matriz A cuadrada de orden 1, el ***determinante*** de A es el valor real a_{11}, y lo indicamos como $|A| = a_{11}$.

Dada una matriz A cuadrada de orden 2, el determinante de A es el valor real calculado como: $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Ejemplo 25:

Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = [3], \quad B = [-1/2], \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución:

Como A y B son de dimensión 1, su determinante coincide con el valor a_{11}, es decir:

$|A| = 3, \quad |B| = -1/2$.

Como C y D son de dimensión 2, aplicamos la fórmula:

$$C=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}\rightarrow |C| = 2\cdot 1-4\cdot 5=2-20=-18$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 6\end{bmatrix}\rightarrow |D| = 3\cdot 6-(-1)\cdot 2=18+2=20$$

Conociendo estos dos casos particulares, podemos ahora extender la definición a matrices de mayor tamaño. Tomemos como ejemplo una matriz de dimensión 3. Su forma general será:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Para calcular el determinante, tenemos que elegir un elemento cualquiera de A, por ejemplo el a_{12}. Luego eliminamos el renglón y la columna en los que se ubica ese elemento, armando una matriz con los elementos restantes:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}$$

Así obtenemos una matriz de 2x2, cuyo determinante se denomina ***menor de*** a_{12}. A continuación, elegimos tomar los restantes elementos que estén en el mismo renglón ó en la misma columna que el valor inicial. Si elegimos por ejemplo la columna donde está a_{12}, los otros elementos son a_{22} y a_{32}. El menor de cada uno de ellos se consigue de la siguiente forma:

$$Para\quad a_{22}: \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$Para\quad a_{32}: \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{bmatrix}$$

Seguidamente, a cada uno de los menores se le agrega un signo positivo o negativo de acuerdo a la posición del elemento para el cual se calcula, según la fórmula $(-1)^{1+j}$. Con esta fórmula, si la suma del número de renglón i y el número de columna j es par, el signo será positivo. De lo contrario, si la suma del número de renglón i y el número de columna j es impar, el signo será negativo. Agregando este signo, decimos que estamos hallando el ***cofactor*** de cada elemento. Entonces:

$$Cofactor\ \ de\ \ a_{12}:\ \ c_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)\cdot\left(a_{21}\cdot a_{33}-a_{31}\cdot a_{23}\right)$$

$$Cofactor\ \ de\ \ a_{22}:\ \ c_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=(1)\cdot\left(a_{11}\cdot a_{33}-a_{31}\cdot a_{13}\right)$$

$$Cofactor\ \ de\ \ a_{32}:\ \ c_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}=(-1)\cdot\left(a_{11}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{13}\right)$$

Por último, el determinante de la matriz A se puede calcular multiplicando cada elemento elegido por su cofactor, y realizando la suma total de esos productos. En ese ejemplo elegimos todos los elementos de la segunda columna, entonces:

$$|A|=a_{12}\cdot c_{12}+a_{22}\cdot c_{22}+a_{32}\cdot c_{32}$$

Este método se puede aplicar eligiendo *cualquier* renglón o columna de la matriz, por lo que siempre será conveniente elegir la opción con mayor cantidad de ceros, para eliminar algunos productos y hacer las cuentas más sencillas.

Ejem

Ejemplo 26: Calcular el determinante de $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & 3 & 6\\ 9 & 7 & 8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 9\\ 3 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$

Solución:

Para la matriz A vemos que no hay elementos cero, por lo que es indiferente la elección que hagamos para el renglón o la columna. Tomemos por ejemplo el primer renglón, entonces:

$$|A| = \underbrace{4\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\7 & 8\end{vmatrix}}_{c_{21}} + \underbrace{3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\9 & 8\end{vmatrix}}_{c_{22}} + \underbrace{6\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\9 & 7\end{vmatrix}}_{c_{23}} =$$

$$= -4\cdot(5\cdot 8 - 7\cdot 2) + 3\cdot(1\cdot 8 - 9\cdot 2) - 6\cdot(1\cdot 7 - 9\cdot 5) =$$

$$= -4\cdot 26 + 3\cdot(-10) - 6\cdot(-38) = -104 - 30 + 228 = 94$$

Para la matriz B el elemento b_{32} es 0, por lo que conviene elegir el tercer renglón o la segunda columna. Optamos por el tercer renglón:

$$|B| = \underbrace{2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 9\\8 & 7\end{vmatrix}}_{c_{31}} + 0\cdot c_{32} + \underbrace{1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\3 & 8\end{vmatrix}}_{c_{33}} =$$

$$= 2\cdot(5\cdot 7 - 8\cdot 9) + 0 + 1\cdot(4\cdot 8 - 3\cdot 5) =$$

$$= 2\cdot(-37) + 1\cdot(17) = -57$$

Esta misma técnica es aplicable a matrices cuadradas de dimensión ≥ 2, por lo que ya sabemos cómo calcular el determinante de cualquier matriz. Destacamos que no es la única técnica existente, pero es suficiente para los objetivos de este curso. Para mayor información, se puede consultar la bibliografía indicada al final de la unidad.

5.5. Regla de Cramer

Ahora que ya podemos calcular determinantes, continuamos con un método que hace uso de este concepto para resolver sistemas de ecuaciones. Ya hemos visto que un sistema puede no tener soluciones, tener una sola o tener infinitas. La regla de Cramer sólo sirve para sistemas con una única solución, por lo que los restantes casos se deben tratar con los métodos que ya se han desarrollado en las secciones previas.

Consideremos el sistema de ecuaciones y su forma matricial

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}, \qquad A\cdot X = B$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de 0, el sistema tiene una única solución. A este determinante lo denotamos con el símbolo Δ. La regla de Cramer establece que en este caso la solución del sistema está dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Donde cada Δ_k es el determinante de la matriz formada al reemplazar la columna k de la matriz de coeficientes por la matriz columna B.

Ejemplo 27: Resolver el sistema $\begin{cases} 2\cdot x + \quad y - 3\cdot z = 4 \\ 4\cdot x + 3\cdot y + \quad z = 18 \\ 6\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = 2 \end{cases}$ aplicando, si es posible, la regla de Cramer.

Solución:

En este sistema, la forma matricial es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Debemos calcular primero el determinante de A, usando la técnica de elegir un renglón o columna. Elegimos el primer renglón:

$$\begin{aligned} \Delta = |A| &= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2\cdot\big(3\cdot(-4)-(-2)\cdot 1\big) + (-1)\cdot\big(4\cdot(-4)-6\cdot 1\big) + (-3)\cdot\big(4\cdot(-2)-6\cdot 3\big) = \\ &= 2\cdot(-10) + (-1)\cdot(-22) + (-3)\cdot(-26) = 80 \end{aligned}$$

Para calcular Δ_1, armamos una matriz en la que se reemplaza la primera columna por los valores de la matriz B:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 18 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Elegimos el primer renglón para calcular el determinante:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 4\cdot\big(3\cdot(-4)-(-2)\cdot 1\big) - 1\cdot\big(18\cdot(-4)-2\cdot 1\big) - 3\cdot\big(18\cdot(-2)-2\cdot 3\big) = \\ &= 4\cdot(-10) - 1\cdot(-74) - 3\cdot(-42) = 160 \end{aligned}$$

Entonces $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{160}{80} = 2$.

Repetimos el procedimiento para la segunda incógnita, reemplazando ahora la segunda columna por las constantes, y eligiendo el primer renglón nuevamente (se puede utilizar cualquier otro):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 18 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2\cdot\big(18\cdot(-4)-(2)\cdot 1\big) - 4\cdot\big(4\cdot(-4)-6\cdot 1\big) - 3\cdot\big(4\cdot 2 - 6\cdot 18\big) = \\ &= 2\cdot(-74) - 4\cdot(-22) - 3\cdot(-100) = 240\end{aligned}$$

Entonces $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{240}{80} = 3$.

Por último, reemplazando la tercera columna:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 18 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2\cdot\big(3\cdot 2-(-2)\cdot 18\big) - 1\cdot\big(4\cdot 2-6\cdot 18\big) + 4\cdot\big(4\cdot(-2) - 6\cdot 3\big) = \\ &= 2\cdot(42) - 1\cdot(-100) + 4\cdot(-26) = 80\end{aligned}$$

Entonces $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{80}{80} = 1$.

6. BIBLIOGRAFÍA.

- Arya, J. C.; Lardner, R. W. (2009). "Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía", quinta edición. México: Pearson Educación

- Haeussler, E. F, Paul, R. S. (2003), "Matemáticas para Administración y Economía", décima edición, México: Pearson.
- Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S. "Precálculo", quinta edición, México: Cengage Learning.
- Tussy, A. S.; Gustafson, R. D. (2006). "Matemáticas Básicas", tercera edición, México: Cengage Learning.